

PORTAFOLIO DE MATEMATICAS III

ECUACIONES DIFERENCIALES



7 de marzo de 2016

EMILIA VALESKA VASQUEZ TAPUY

**Ecuaciones Diferenciales**

Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial

* **Clasificación:**
* **Simbología:**

En primer lugar estudiaremos las EDO las cuales se clasifican en:

* Grado
* Orden
* Linealidad

1. **Orden**

El orden de una ecuación diferencial ya sea una ecuación diferencial ordinaria o ecuación diferencial parcial es el orden de la mayor derivada en la ecuación

**Ejercicios: Identifique el orden de las siguientes ecuaciones.**

1. **Linealidad**

En la vida real los hechos no ocurren de manera lineal. Las dos propiedades características de una EDO lineal son:

* La variable dependiente y así como todas sus derivadas, son de primer grado es decir la potencia de cada uno de los términos que involucra “y” es igual a uno.
* Los coeficientes de dependen a lo sumo (máximo) de la variable independiente “x”
* La variable dependiente no debe estar inmersa con función trigonométrica
* **Verificación de una solución**

Compruebe que la función señalada representa una solución de la ecuación diferencial dada sobre el intervalo real.



~~6~~

Reemplazo:

**Clase de repaso**

**Eliminación de constantes arbitrarias**

**Eliminación de Constantes Arbitrarias**

**Ejemplo:**

**Familia de Curvas**

* La primera derivada nos dará la recta tangente.
* La segunda derivada permite hallar la aceleración de un cuerpo
* La tercera derivada permite hallar la velocidad

Una relación que contiene un parámetro así como una o ambas coordenadas de un punto en un plano representa una familia de curvas, una curva correspondiente a cada parámetro

**Ejemplo:**

* **Ecuación de la circunferencia:**
* **Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas que tiene sus vértices en el origen y sus focos sobre el eje y**

**#2: Rectas que pasa por el punto fijo (h, k), la h y k no deben eliminarse.**

f(x)

k

x1 h x

f(x)

Ejemplo:

Circunferencia

* **En los problemas 1 y 2 es una familia paramétrica de solución de ecuaciones diferenciales de 1er orden Encuentra una solución del PBI de 1er orden que consiste en esta ecuación diferencial y la condición inicial dada.**

Reemplazar en la en la ecuación

Reemplazar en la ecuación los 1eros valores de “x” y “y”.

(1)

Reemplazar en la ecuación los 2dos valores de “x” y “y”.

(2)

* **En los problemas del 3 al 6 . Es una familia uniparamétrica de soluciones de la ED de 1er orden . Determine una solución del PVI de 1er orden que conste en esta ED y la condición inicial dada. Dé el intervalo I más largo en el cual está definida la solución.**

Reemplazar en la en la ecuación

Reemplazar en la ecuación los 1eros valores de “x” y “y”.

Deducimos que

Denominador ≠ 0

Raíz Cuadrada: Cantidad radical ≥ 0 (siempre +)

Cantidad Radical > 0

≥ , ≤ → •, [

<, > → 0, C

Reemplazar en la ecuación los 2dos valores de “x” y “y”.

Deducimos que

**CLASES**

**Determine una región del plano x, y para que la ED dada tenga cuyas gráficas pasar por un punto X0, Y0. En la región**

Solución: Semiplano definido por “y” mayor a cero, ó “y” menor a cero.

**2.**

Solución: Semiplano definido por “x” mayor a cero, “x” menor a cero.

**3.**

Deducimos que:

Solución: Semiplano definido por “y” más que 2 y “y” menor que -2, ó -2 < y > 2.

*Nota: Si se habla de “y” es intervalo, si es “x” se habla de dominio.*

**4.**

Solución: Cualquier región que no contenga 0, 0 y que tampoco contenga al origen.

**5.**

Deducimos que:

**6.**

Solución: Son números reales.

* **En los problemas del 25 al 28 los teoremas 1.2.1 garantiza que la ecuación diferencial tiene una única solución que pasa por el punto dado.**

\*Con respecto al teorema 1.2.1 si cumple.

\*Con (2, -3) → No cumple porque “y” pasa por -3 y debe ser menor que -3.

\*Con (5, 3) → No cumple porque “y” debe ser mayor a 3.

**29.**

1. **Por inspección determine una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial x y’=y , y(0)=0.**

**Comprueba que cada miembro de la familia es una solución del problema con valores iniciales x y’=y , y(0)=0.**

1. **Explique el inciso *u*, determine una región R en el plano x, y para el que la ED x y’=y tendría una solución única que pase por el P(XO, YO).**
2. **Compruebe que la función definida x tramos satisface la ecuación Y(0)=0. Determine si esta función es también una solución del problema con valores iniciales del inciso *u*.**

a)

b)

c) No es solución (porque determinamos que x ≠ 0 y el C), se pidió que se compruebe si x ≥ 0 es más o menos igual que 0, y no será una solución.

**Modelación Matemática**

Descomposición, crecimiento y reacciones químicas.

La rapidez de descomposición de una sustancia radioactiva en un tiempo particular (t) es proporcional a la cantidad presente en ese tiempo.

La rapidez de crecimiento del número de bacterias en una solución de proporcional al número de bacterias presente. Si ese representa la masa de una sustancia radiactiva presente en el tiempo (t) o el número de bacteria presentes en una solución en el tiempo (t), entonces la ley de la descomposición y de crecimiento, esta expresado por la 1ra derivada de para la descomposición y la 1ra derivada de para el crecimiento, donde k es un factor de proporcionalidad.

*Lo eleva a* ***e*** *para eliminar el* ***ln***

*Lineal*

* **Determina la ecuación diferencial del crecimiento bacteriano (para determinarlo).**

Cambio te temperatura

Ley del enfriamiento de Newton establece;

Que la rapidez de cambio de temperatura de un cuerpo en cualquier tiempo (t), es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo y el medio circundante en el tiempo (t). Consideremos a T la temperatura del cuerpo en el tiempo (t) y a (m) la temperatura del medio circundante y To temperatura inicial del cuerpo cuando el tiempo es igual a 0.

La variación de la temperatura puede ser que aumenta o disminuya.

La ley de enfriamiento de Newton se expresa mediante la ecuación diferencial:

* **Determinar el modelo matemático para la ley de enfriamiento**

*Según la ley de Newton*

La velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia. Si la temperatura del aire es de 20°C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100°C a 60°C, ¿En qué tiempo su temperatura descenderá hasta 30°C?

Un termómetro que marca 18°F, se lleva a un cuarto cuya temperatura es de 70°F, un minuto después la lectura del termómetro es de 31°F.

Determine las temperaturas medidas como una función del tiempo y en particular encontrar la T que maraca el termómetro 5 minutos después que se lleva al cuarto.

t T

0 70°F

1 31°F

5

**Mezclas**

Se mezclan 2 soluciones con diferencial de 1° orden, que define la cantidad de sal contenida en la mezcla. Supongamos que un tanque mezclador inicia con un volumen V0. Otra solución de salmuera entra al tanque con una razón de F0 y una concentración de X0 cuando la solución en el tanque está bien mezclada, sale con la misma rapidez con que entra. Si A/dt denota la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t, entonces la razón con la que A/dt función de t cambia es una razón neta.

La razón de entrada Re con la que entra la sal en el tanque es el producto de la concentración de entrada por la razón de entrada del fluido Re está medida en masa x tiempo. Rs es la razón de salida, si Re y Rs denota las razones generales de entrada y salida de las soluciones de salmuera, entonces existen 3 posibilidades:

1.- Que Re=Rs

2.- Que Re>Rs

3.- Que Re<Rs

***Drenado de un tanque***

Ley de Torricelli establece la rapidez V de salida del agua a través de un agujero de bordes afilados en el fondo de un tanque lleno con agua hasta una profundidad h, es igual a la velocidad de un cuerpo (en este caso una gota de agua), que está cayendo libremente desde una altura h, esto es **V =** donde g es la aceleración de la gravedad. Esta expresión surge al igualar la energía cinética y la energía potencial.

Conservación de Energía

1/2mv2 Ley de Torricelli

m\*g\*h

En esta ecuación se desperdicia, la cual podría causar una reducción de la razón de flujo. Si ahora el volumen del agua en el tiempo ´´´t´´ se expresa como **V(t) = Aw x h**, donde Aw es el área constante de la superficie superior del agua entonces la 1° derivada de

Ejercicio:

Resolver la ecuación diferencial para el drenado de un tanque.

🡪 Despejar h

**Cuerpos de salida**

Para establecer el modelo matemático de un cuerpo que se mueve en un campo de fuerzas, con frecuencia se empieza con la segunda Ley de Newton la cual indica: que cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es cero, entonces la fuerza neta es proporcional a su aceleración.

F= m.a ejemplo: suponga que lanza una piedra hacia arriba desde el techo de un edificio cual es la posición ‘’s’’ función de ‘’t’’, la piedra con respecto al suelo al tiempo (t).

v. instantánea = = a

F= m.a

Integrar:

Cuando el tiempo S(0) = S0 ; S´(0) = V0

V0 = C

S(t) = v0 t - +C1

S(0) = C1

**S(t)= V0t. +S0** Reemplazo

**Repaso**

\*Ecuación de crecimiento poblacional

\*Ecuación de decaimiento

\* Ecuación: Ley de Enfriamiento

*Generación= 0*

*1: re= rs*

*2: re>rs*

*3: re<rs*

Escriba el resultado como una ecuación diferencial de 1° orden que no contiene el símbolo C1 y que tiene la formula dy/dx = f(x.y).

El símbolo C1 representa una constante

**ECUACIONES DE PRIMER GRADO Y PRIMER ORDEN**

Damos valores de frontera a x y y,

**EDO**

Reemplazo el valor de x y, y:

**EJERCICIOS**

**Respuesta:**

**Respuesta:**

**Respuesta:**

* **Respuesta:**

**Respuesta:**

***Respuesta:***

* **Respuesta:**

**Respuesta:**

En los ejercicios 1 - 19 obténgase la solución general

**Respuesta:**

**2. *)***

**Respuesta:**

***3.***

**Respuesta:**

***4. .-***

***5.***

**Respuesta:**

***6.***

**Ejercicio # 22.**

**Ejercicio #23**

**Ejercicio #24.**

**Ejercicio #29.**

**Ejercicio #31.**

**Segundo Parcial**

La ecuación lineal de primer orden

**Forma estándar para ecuación lineal de 1° orden.**

**Ejercicio #1.**

**=0**

1° es lineal para “y”, se la deja sola

**Ejercicio #2.**

Resolver por partes

**Ejercicio #3.**

**Lineal para “y”**

**2)**

**4)**

**5)**

**6)**

**7)**

**Ecuaciones lineales**

**1º Paso**

***Una ecuación es homogénea***

***Una ecuación diferencial no homogénea***

* **Caso de integrales** (*método tradicional*)
* (*Ecuación no homogénea*)

**Donde**

Lim c x = 1

Y = 1

c = 1 – c = = =

C =

C = (e – 1).

+ 2y = ;

{1, 0 ≤ x ≥ 3

{0, x 3

Dy + 2ydx = dx v= =

dy + 2dy = u =

= du = . dx

= + c

Y = + c ­------ c =

Lim y =

X = 3

= ; x = 3

=

; 0 ≤ x ≤ 3

{ – 1) , x 3 Dominio = [0, ]

* **- 2x = ;**

= {0 ; 0 ≤ x ≤ 1

; X ≥ 1

Y= c + ∫

Y= c + ∫

Y= c + ∫

Y= c + 2 ∫

Y= c + . 2 Y= c + .

= + .

= + .

Y= c+ . = 1

1 = c + .

C= 1

= 1

Definidas por integrales

Funciones no elementales.

Son funciones no elementales es decir que no poseen anti derivadas.

Ej.: ∫: ∫sen

Aquí se envió de deber el ensayo sobre este tema.

Métodos no lineales

Reacción Química. Cinética de las reacciones segundo orden.

= K [A] [B] A + B = C

Fracción molar A = Fracción molar B =

MA + NB = C = cantidad de gramos C.

= x

= K

= K.

= K. .

B =

= K [ - x] [B - x]

=

+ = Kt

+ =

Cuando ocurre la reaccion producida por ambos químicos es tal que para cada gramo de A se utilizan 4 gramos del compuesto B. Se observa que en 10 min se forman 30 gr del compuesto C. Determine la cantidad de C en el tope T si la velocidad de la reaccion es proporcional a las cantidades de A y B restantes y si inicialmente habrá 50g de A y 32g de B. ¿Cuánto compuesto de C está presente a los 15 min? Interprete la solución cuando t tarde al infinito.

30g

?

a= 50g de A 1g de A + 4g de B = 1g de C

b= 32g de B

= =

a= 50.5 = 250 B= 32. 5/4 = 40

=

+ =

40A – Ax + 250B + Bx = 1 40A – 250A = 1

A = -B

A= - B=

+ =

=

= Kt + C

Ln = 210 Kt

= + C C=

= [t=10min ]

=

Ln 22. =

K= K= 5.99x

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Ecuaciones lineales.

+ + ……………… +

=

Y’ =

Teorema.

Son continuas en un intervalo I, y que es diferente de cero.

Para toda x presente en este intervalo si x= está en cero.

Ejercicio # 1

En los siguientes problemas la familia de frecuencia dada es la solución general de la Ed en el intervalo indicado. Encuentre una de las familias que sea una solución al problema de valor inicial.

Y = + (-, ) y’’- y = 0 ; cuando y=0 ; x=0 ; y’=1

Y’= -

Y’’= -

Y’’ – y = 0

= 0

Y = -

R//.

**3.**

**4.**

**5.**

**EJEMPLO**

DETERMINAR SI LA ECUACION DIFERENCIAL ES EXACTA, SINO RESUELVALA

NO ES EXACTA

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Si z= es una función de dos variables con primeras derivadas parciales continuas en una región R del plano xy entonces su diferencial es:

DEFINICIÓN DE ECUACIONES EXACTAS

Una expresión diferencial es una diferencial exacta en una ecuación en una región R del plano xy si corresponde al diferencial de alguna función , se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la formula es una ecuación exacta si la presión del lado izquierdo es una diferencial exacta

EJERCICIO

Podemos encontrar “f” al integrar con respecto a “x” mientras y se mantiene constante.

Donde la función arbitraria es la constante. Ahora a derivar con respecto a “y”.

* ; ;

* Encuentre un intervalo centrado en x=0, para el cual el problema de valor inicial tenga una solución única (x – 2) , cuando

Principio de superposición

La suma o superposición de dos o más soluciones de una ED lineal homogénea es también una solucione

TEOREMA:

Sean , soluciones de la ecuación homogénea de n – esimo orden en un intervalo I, entonces la combinación lineal ; donde las , son constantes arbitrarias, también es un solución en el intervalo.

COROLARIO

Un múltiplo constante de una solución de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución.

Una ecuación diferencial lineal homogénea tiene siempre la solución trivial y=0

Ejemplo: son soluciones de la ecuación lineal homogénea en el intervalo (0 , ∞ )



Dependencia lineal e independencia lineal

Se dice que un conjunto de funciones es linealmente dependiente en un intervalo i, si existen constantes no todas o tales que , para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo se dice que es linealmente independiente.

Un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo i si las únicas constantes para las que . Para toda x en el intervalo son .

Un conjunto de 2 funciones se concluye que es linealmente independiente cuando ninguna función es un, múltiplo constante de la otra en el intervalo.

Ejemplo: determine si es linealmente independiente o dependiente.

Las soluciones son linealmente dependientes con por que es un múltiplo constantes

* es linealmente dependiente al intervalo

Demuestre:

1 1

NOTA: Un conjunto de funciones es linealmente dependiente en un intervalo si por lo menos una función se puede expresar como una combinación lineal de las otras funciones.

Reducción de orden

Suponga que ydx denota una solución conocida de la ecuación se busca una segunda solución de manera que son linealmente independiente en algún intervalo i.

NOTA: Si son linealmente, entonces su cociente (razón no es constante en i, es decir o

La idea es encontrar un udx mediante la sustitución de en la ecuación diferencial dada. Este método se lo conoce como reducción de orden ya que debemos resolver una ecuación de primer orden para encontrar u

Ejemplos:

* Dado que en una solución en el intervalo de -∞ hasta ∞, use la reducción de orden para encontrar una solución

Solución general

Si se elige que

* En los siguientes problemas utilice la reducción de orden o la formula general para encontrar una segunda solución



[

**Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes**

Se empieza por considerar el caso especial de la ecuación de 2° orden , donde a y b son constantes. Si se intenta encontrar una solución de la forma

Cuando son números conjugados complejos si es menor a 0

;

;

EJERCICIOS:



y=0 ; x=1

* Encuéntrese para cada x=1 el valor de y y que satisface la ecuación pedida

🡪

* *3y´´+ 2y´+ y = 0*

*3D2 + 2D + 1= 0*

*= -1/3*

*Y= (C1 cosx + C2 senx)*

* *12y´´ - 5y´-2y = 0*

*12D2 – 5D – 2 = 0*

*+ -*

*y= (C1 cosx + C2 cosx)*

* *Y´´´- 4y´´-5y´ = 0 D= 0*

*D3 – D2 – 5D = 0 D= 5*

*D( D2 – 4D – 5) = 0 D= -1*

*(D-5)(D+1)*

*Y= C1 + C2e5x + C3e-x*

* *Y´´´ - 5y´´ + 3y´ + 9y = 0 (D-3)(D2-2D-3)*

*D3 – 5D2 + 3D + 9 = 0 (D-3)(D+1)*

*D= 3*

*1 – 5 + 3 + 9 3 D= -1*

*3 – 6 – 9 D= 3*

*1 – 2 – 3 0*

*Y= C1e3x + C2e3x + C3e-x*

* *Y´´´ + y´´ - 2y = 0 D= 0*

*D3 + D2 – 2 = 0 D= -2*

*D(D2 + D – 2) = 0 D= 1*

*(D+2)(D-1)*

*Y= C1 + C2e-2x + C3ex*

*MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS*

* *Y´´ + 4y´ - 2y = 2x2 – 3x + 6*

*D2 + 4D – 2 = 0*

*m1= -2+ m2= -2-*

*1e-2 + C2e-2*

* *Yp= Ax2 + Bx + C*

*Y´= 2Ax + B y´´ + 4y´ - 2y = 2x2 – 3x + 6*

*Y´´= 2A 2A + 4(2Ax + B) – 2(Ax2 + Bx + C)*

*2A + 8Ax + 4B – 2Ax2 – 2Bx – 2C = 2X2 – 3x + 6*

*X2 = 2A = 2 🡪 A = -1*

*X = 8A – 2B = -3 🡪 B= -5/2*

*N= 2A + 4B – 2C = 6 🡪 C= -9*

*Ax2 + Bx + C = -x2 -5/2x -9*

*Y= C1e-(2+)x  + C2e-2x – x2 – 5/2x -9*

* *Y´´- 10y´ + 25y = 30x + 3*

*D2 - 10D + 25 = 0 y= Ax + B*

*(D-5)(D-5) = 0 y´= A*

*Y= C1e5x + C2xe5x Y´´= 0*

*-10 A +25Ax + 25B = 30x + 3*

*X= 25A=30 🡪 A= 6/5*

*N= -10A+ 25B = 3 🡪 B= 3/5*

*Ax +B = 6/5 + 3/5*

*Y= C1e5x + C2xe5x + 6/5x + 3/5*

* *Y´´ + 3y´ + 2y = 6 y= A*

*D2 + 3D + 2= 0 y´= 0*

*(D+2)(D+1) y´´= 0*

*D= 2 2A=6 y= C1e-2x + C2e-x + 3*

*D= 1 A= 3*

* *¼ y´´ + y´+ y = x2 – 2x*

*¼ D2 + D + 1 = 0*

*Y= C1e-2x + C2xe-2x*

*Ax2 + Bx + C ¼ (2A) + 2Ax + B + Ax2 + Bx + C = x2 – 2x*

*Y´= 2Ax + B ½ A + 2Ax + B + Ax2 + Bx + C = x2 – 2x*

*Y´´= 2A X2= A=1*

*X= 2A + B = -2x 🡪 B= -4*

*N= ½ A + B + C = 0 🡪 7/2*

*Y= C1e-2x  + C2xe-2x + x2 – 4x + 7/2*

* *Y´´ - 5y´ + 4y = 8ex*

*D2 – 5D + 4 = 0 Axex*

*(D-4)(D-1) y´= A.ex + Axex*

*Y´´= 2Aex + Axex*

*Y= C1e-x + C2ex  Aex – 5Aex + 4Aex = 8ex*

*2Aex + Axex – 5Aex + 5Axex + 4(Axex) = 8ex*

*Ex= 2A- 5A= 8 🡪 -3A=8 🡪 A= -8/3*

*Y= C1e4x + C2ex – 8/3 xex*

* *Y´´ - 4y = 10 e3x*

*Y´= 30 e3x D2 – 4= 0*

*Y´´= 90 e3x D= D=*

*Yp= Ae3x Yc= C1e2x + C2e-2x*

*Y´= 3Ae3x 9Ae3x – 4Ae3x = 10e3x*

*Y´´= 9Aeex 9A – 4A= 10 🡪 A= 10/2 🡪 A=2*

*Y= C1e2x + C2e.2x + 2e3x*

* *Y´´ - 2y´ + y = ex*

*Yc= C1ex + C2xex*

*Y= Ax2 ex*

*Y´= 2Axex + Ax2 ex*

*Y´´= 2Aex + 2Axex + 2Axex + Ax2ex 🡪 2Aex + 4Axex + Ax2ex*

*2Aex + 4Axex + Ax2ex - 2Axex + Ax2 ex 🡪 ex*

*ex= 2A= 1 🡪 A= ½*

*y= C1ex + C2xex + ex*

* *Y´´ - 2y – 3y = 4x – 5 + 6xe2x*

*D2 – 2D – 3= 0 Yp= Ax + B + Cxe2x + Ee2x*

*(D-3)(D+1) y´= A + Ce2x + 2Ce2x + 2Ee2x*

*D= 3 D= 1 y´´= 2Ce2x + 2Ce2x + 4Cxe2x + 4Ee2x 🡪 4Ce2x + 4Cxe2x + 4Ee2x*

*Yc= C1e3x + C2e-x*

*4Ce2x + 4Cxe2x + 4Ee2x +2Ce2x + 2Ce2x + 4Cxe2x + 4Ee2x + Ce2x + 2Ce2x + 2Ee2x = 4x – 5 + 6e2x*

*2Ce2x – 3Cxe2x – 3Ee2x – 2A- 3Ax – 3B = 4x – 5 + 6e2x*

*e2x = 2C – 3E*

*xe2x= -3C*

* *Y(4) + 2y´´ + y = (x-1)2 🡪 x2 – 2x + 1*

*(D2 + 1)2  Yp= Ax2 + Bx + C*

*D2 = -1 y´= 2Ax + B*

*D= 🡪 y´´= 2ª*

*Y´´´= 0*

*Y=C1cos + C2sen-x Y(4)= 0*

*4A+ Ax2 Bx + C = X2 – 2x + 1*

*X2: A = 1*

*X: B = -2*

*N: 4A+ C = 1 🡪 C= 1-4 🡪 C= -3*

*Y= C1cosx + C2senx + x2 – 2x -3*

* *Y´´´- 6y´´ = 3 – cosx*

*D3 – 6D2 = 0 Yp= Ax2 + B cosx + C sen x*

*D2 (D-6) = 0 y´= 2Ax – B senx + C cosx*

*D2 = 0 y´´= 2A- B cosx – C senx*

*D = 6 y´´´= B senx – C cosx*

*Y= C1 + C2x + C3e6x*

*B senx – C cosx – 12A+ 6B cosx + 6C senx = 3 – cosx*

*Senx= B + 6C = 0*

*Cosx= -C + 6B = -1*

*N= -12A= 3 🡪 A= -1/4*

*B= 6/35*

*C= = -1/35*

*Yp= -x2 + cosx - sen x*

*Y= C1 + C2x + C3e6x --x2 + cosx - sen x*